

Se consideră sistemul de ecuații liniare (S): 
$$\begin{cases} x + 2y + z = p + 2 \\ x - 2y - 3z = 0 \\ 3x + y - pz = 7 \end{cases}, \text{ unde } p \in \mathbb{R}.$$

(10p) 1) Rezolvați ecuația : 
$$\begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & t & -2 \end{vmatrix} = 0, t \in \mathbb{R};$$

(10p) 2) Determinați  $p \in \mathbb{R}$  pentru care matricea sistemului ( S ) are rangul 2 și sistemul este compatibil;

( 5p) 3) Pentru  $p = 2$ , găsiți tripletul  $(x, y, z)$  pentru care  $x + y + z = 4$ .

( 5p) 4) Arătați că există cel puțin două perechi  $(a, b)$  de numere reale pentru care funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} a + \sin x & , x \leq 0 \\ x - x^2 + b & , x > 0 \end{cases}$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$ .

Se consideră funcțiile  $f, g, h, j : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definite prin:  $f(x) = x^2 \cdot \sin x$ ,  $g(x) = \frac{3x-1}{1+x^2}$ ,  $h(x) = \sqrt{2x-1}$  și  $j(t) = e^{t+t^2}$ .

(15p) 5) Calculați  $f'(\pi)$ ,  $g'(0)$ ,  $h'(1)$  și  $j'(0)$ .

Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x + m, m \in \mathbb{R}$ .

( 5p) 6) Pentru  $m = 2$ , scrieți ecuația tangentei la graficul funcției considerate în punctul  $x_0 = 1$ ;

( 5p) 7) Determinați  $a \in \mathbb{R}$  pentru care  $f''(a) = 6$ ;

( 5p) 8) Pentru  $m = 1$ , determinați  $f([-1, 1])$ ;

( 5p) 9) Determinați, pentru  $m = -3$ , numărul rădăcinilor reale ale ecuației  $f(x) = 0$ ;

( 5p) 10) Arătați că, pentru orice  $m \in \mathbb{R}$ , funcția  $f$  are două puncte de extrem local.

( 5p) 11) Găsiți funcția derivabilă  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  pentru care  $f(1) = 3$  și  $x \cdot f'(x) = 3, \forall x \in (0, \infty)$ .

( 5p) 12) Dacă  $a, b \in (0, \infty)$  și  $a^x + b^x \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$ , calculați valoarea produsului  $a \cdot b$ .

Notă: Din oficiu se acordă 20 de puncte.